Journée Preuves

Utilisation de la concurrence pour les tableaux analytiques en logique du premier ordre

Julie CAILLER

4 juin 2021

Doctorante dans l'équipe MaREL
LIRMM, Université de Montpellier, CNRS

Introduction

Vue d'ensemble

- Preuve automatique de théorèmes
- Logique du premier ordre
- Méthode des tableaux analytiques
- Nouvelle approche : la concurrence

Sommaire

Logique et méthode des tableaux analytiques

Historique

La logique

- Aristote
- Logique mathématique au milieu 19e siècle avec G. Boole
- Logique du premier ordre fin 19e avec C.S. Peirce et G. Frege

La méthode des tableaux

- Inventée dans les années 1950 par E.W. Beth et J. Hintikka
- Améliorée dans les années 1970 par R. Smullyan et M. Fitting

Logique

Logique des propositions

- Termes : a, b, $\neg c$
- Connecteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- Décidable

$$(a \wedge b) \Rightarrow \neg c$$

Logique du premier ordre

- Termes et prédicats : x, y, $f(a)$, $f(x)$, $P(x)$, $Q(x, y)$
- Quantificateurs : $\forall$ et $\exists$
- Semi-décidable

$$\forall x \ (humain(x) \Rightarrow mortel(x))$$

Méthode des tableaux

Éléments de base

- Un ensemble d'hypothèses et une conjecture
- Réfutation : négation de la conjecture
- Application de règles
- Objectif : fermer toutes les branches

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X)}{\sigma = \{X/a\}}\odot_\sigma \qquad \dfrac{Q(X)}{\sigma = \{X/a\}}\odot_\sigma}{}}{P(X) \vee Q(X)}\,\beta_\vee}{\forall x.P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(a)}\,\gamma_{\forall M}}{(\forall x(P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a)}\,\alpha_\wedge$$

Règles de clôture

Description

- Permettent de fermer une branche
- Symboles spéciaux $\top$ et $\bot$
- Contradiction entre deux termes (unifiables)

$$\frac{\bot}{\odot}\ \odot_{\bot} \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\ \odot_{\neg\top}$$

$$\frac{P, \neg P}{\odot}\ \odot \qquad \frac{P, \neg Q}{\sigma}\ \odot_{\sigma}$$

tq $\sigma(P) = \sigma(Q)$

Règles alpha

Description

- Règles de conjonction

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{\neg(P \lor Q)}{\neg P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\lor}$$

$$\frac{P \land Q}{P, Q}\ \alpha_{\land} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\Rightarrow}$$

Règles bêta

Description

- Règles de disjonction
- Créent deux nouvelles branches

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\ \beta_{\vee}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\ \beta_{\neg\wedge}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\ \beta_{\Rightarrow}$$

$$\frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\ \beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

Règles gamma

Description

- Règles universelles
- Introduction et réintroduction de métavariables
- x est une variable universelle, X est une métavariable (ou variable libre)
- Retardement de l'instanciation

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(x := X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x\ P(x)}{\neg P(x := X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

Règles delta

Description

- Règles existentielles
- x est une variable existentielle
- s est un nouveau symbol de Skolem : constante (c_1, c_2) ou fonction avec en paramètre les métavariables de la branche $(sko(X, Y), sko(X), ...)$
- Replacement de la variable existentielle par un symbole de Skolem dans la formule

$$\frac{\exists x\ P(x)}{P(x := sko(vars))}\ \delta_{\exists} \qquad \frac{\neg\forall x\ P}{\neg P(x := sko(vars))}\ \delta_{\neg\forall}$$

Présentation générale

Principes de base et objectifs

- Un ensemble d'hypothèses et une conjecture
- Négation de la conjecture
- Application de règles
- Objectif : fermer toutes les branches (contradictions)
- Substitution : assignation d'une métavariable à un terme
- Règles de priorité entre les formules : $\odot \prec \alpha \prec \delta \prec \beta \prec \gamma$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y))))$

$$\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y))))}{\cfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y)))}{P(a), \neg P(b), \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y)))} \, \alpha_{\land}} \, \alpha_{\neg\neg}$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y))))$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y)))} \ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y)))} \ \alpha_{\land}}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y))} \ \gamma_{\forall M}$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\begin{array}{cl}
\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))) & \\ \hline
P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))) & \alpha_{\neg\neg} \\ \hline
P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))) & \alpha_{\land} \\ \hline
P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)) & \gamma_{\forall M} \\ \hline
\neg P(X), \neg(\forall y\ P(y)) & \beta_{\Leftrightarrow}
\end{array}
$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\cfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\cfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\cfrac{P(a) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\cfrac{\neg P(a), \neg(\forall y\ P(y))}{\sigma = \{X \mapsto a\}}\ \odot_\sigma}\ \beta_\Leftrightarrow}\ \gamma_{\forall M}}\ \alpha_\land}\ \alpha_{\neg\neg}
$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\begin{array}{cc|l}
\multicolumn{2}{c}{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))} & \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))} & \alpha_{\neg\neg} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))} & \alpha_{\land} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{P(\textcolor{red}{a}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))} & \gamma_{\forall M} \\
\hline
P(\textcolor{red}{a}), \forall y\ P(y) & \neg P(\textcolor{red}{a}), \neg(\forall y\ P(y)) & \beta_{\Leftrightarrow} \\
\cline{2-2}
 & \sigma = \{X \mapsto a\} & \odot_{\sigma}
\end{array}
$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\land}}{P(a) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}}{\cfrac{P(a), \forall y\ P(y)}{P(Y)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \cfrac{\neg P(a), \neg(\forall y\ P(y))}{\sigma = \{X \mapsto a\}}\ \odot_{\sigma}}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

Exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\,\alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\,\alpha_{\land}}{P(a) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\,\gamma_{\forall M}}{\dfrac{\dfrac{P(a), \forall y\ P(y)}{P(b)}\,\gamma_{\forall M}}{\sigma = \{Y \mapsto b\}}\,\odot_{\sigma} \qquad \dfrac{\neg P(a), \neg(\forall y\ P(y))}{\sigma = \{X \mapsto a\}}\,\odot_{\sigma}}\,\beta_{\Leftrightarrow}
$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\land}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\land}}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\wedge}}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}}{P(X), \forall y\ P(y)}\ \beta_{\Leftrightarrow}
$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y))))$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y)))}\,\alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x \; (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y)))}\,\alpha_{\land}}{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y \; P(y))}\,\gamma_{\forall M}}{\cfrac{P({\color{red}b}), \forall y \; P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\,\odot_{\sigma}}\,\beta_{\Leftrightarrow}
$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\wedge}}{P(\color{red}{b}\color{black}{)} \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}}{\dfrac{P(\color{red}{b}\color{black}{)}, \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_{\sigma} \qquad \neg P(\color{red}{b}\color{black}{)}, \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta_{\Leftrightarrow}
$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\land}}{P(\color{red}{b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}}{\dfrac{P(\color{red}{b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_{\sigma} \qquad \dfrac{\neg P(\color{red}{b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(sko(b))}\ \delta_{\neg\forall}}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\dfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(\color{red}{b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P(\color{red}{b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad \dfrac{\neg P(\color{red}{b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\dfrac{\neg P(sko(b))}{P(X_2) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ reintroduction}\ \delta_{\neg\forall}}\ \beta_{\Leftrightarrow}}\ \gamma_{\forall M}}\ \alpha_{\land}}\ \alpha_{\neg\neg}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\,\alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\,\alpha_{\wedge}}{P(b) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\,\gamma_{\forall M}}{\dfrac{P(b), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\,\odot_{\sigma} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P(b), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(sko(b))}\,\delta_{\neg\forall}}{P(X_2) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\, reintroduction}{P(X_2), \forall y\ P(y)}\,\beta_{\Leftrightarrow}}\,\beta_{\Leftrightarrow}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\wedge}}{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}$$

$$\dfrac{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P({\color{red}b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P({\color{red}b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(sko(b))}\ \delta_{\neg\forall}}{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ reintroduction}{\dfrac{P({\color{red}b}), \forall y\ P(y)}{\begin{array}{c}\sigma = \{X_2 \mapsto b\} \\ \sigma' = \{X_2 \mapsto sko(b)\}\end{array}}\ \odot_\sigma}\ \beta_{\Leftrightarrow}}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}$$

$$\dfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\land}$$

$$\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(\color{red}{b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}$$

$$\dfrac{P(\color{red}{b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P(\color{red}{b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad \neg P(\color{red}{b}), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

$$\dfrac{\neg P(\color{red}{b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(sko(b))}\ \delta_{\neg\forall}$$

$$\dfrac{\neg P(sko(b))}{P(\color{red}{b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ reintroduction$$

$$\dfrac{P(\color{red}{b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P(\color{red}{b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X_2 \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad \neg P(\color{red}{b}), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma' = \{X_2 \mapsto sko(b)\}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\dfrac{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P({\color{red}b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad \dfrac{\neg P({\color{red}b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\dfrac{\neg P(sko(b))}{\dfrac{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P({\color{red}b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X_2 \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad \dfrac{\neg P({\color{red}b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(sko(b))}\ \delta_{\neg\forall}}\ \beta_\Leftrightarrow}\ reintroduction}\ \delta_{\neg\forall}}\ \beta_\Leftrightarrow}\ \gamma_{\forall M}}\ \alpha_\wedge}\ \alpha_{\neg\neg}
$$

$$\sigma' = \{X_2 \mapsto sko(b)\}$$

Exemple en commençant par l'autre branche

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$
\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\cfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\cfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\cfrac{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\cfrac{P({\color{red}b}), \forall y\ P(y)}{\sigma = \{X \mapsto b\}}\ \odot_\sigma \qquad \cfrac{\neg P({\color{red}b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\cfrac{\neg P(sko(b))}{\cfrac{P({\color{red}b}) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\cfrac{P({\color{red}b}), \forall y\ P(y)}{\begin{array}{c}\sigma = \{X_2 \mapsto b\} \\ \sigma' = \{X_2 \mapsto sko(b)\}\end{array}}\ \odot_\sigma \qquad \cfrac{\neg P({\color{red}b}), \neg(\forall y\ P(y))}{\cfrac{\neg P(sko(b))}{\cdots}\ reintroduction}\ \delta_{\neg\forall}}\ \beta_{\Leftrightarrow}}\ reintroduction}\ \delta_{\neg\forall}}\ \beta_{\Leftrightarrow}}\ \gamma_{\forall M}}\ \alpha_{\land}}\ \alpha_{\neg\neg}
$$

Apports de la concurrence et implémentation

Méthode des tableaux concurrente 1/2

Pourquoi ?

- Structure arborescente qui s'adapte naturellement à la concurrence
- Pas de prouveur au premier ordre concurrent utilisant la méthode des tableaux

Différences avec la version séquentielle

- Lors de l'application d'une règle bêta, traiter les deux nouvelles branches simultanément
- Système processus père/fils et de métavariables mère/filles
- Échange de substitutions

Méthode des tableaux concurrente 2/2

Nouveaux comportements

- Attente des fils : branche clôturée avec ou sans substitution ou branche ouverte
- Attente du père : envoie d'une substitution ou ordre d'arrêt nœud
- Ordonnancement des réponses des fils (priorité sur les métavariables)

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y))))$

$$\frac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x \ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y \ P(y)))} \ \alpha_{\neg\neg}$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\neg\neg}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\wedge$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\neg\neg}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\wedge}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma\forall M$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\neg\neg}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\land}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma\forall M}{P(X), \forall y\ P(y) \qquad \neg P(X), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta\Leftrightarrow
$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\neg\neg$$

$$\dfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\land$$

$$\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma\forall M$$

$$\dfrac{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{P(X), \forall y\ P(y) \qquad \neg P(X), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta \Leftrightarrow$$

$$\dfrac{P(X), \forall y\ P(y)}{P(\textcolor{red}{b})} \qquad \dfrac{\neg P(X), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(\textcolor{red}{a})}$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\neg\neg$$

$$\dfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha\land$$

$$\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma\forall M$$

$$\dfrac{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{P(X), \forall y\ P(y) \qquad \neg P(X), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta \Leftrightarrow$$

$$\dfrac{P(X), \forall y\ P(y)}{P(b)} \qquad \dfrac{\neg P(X), \neg(\forall y\ P(y))}{\neg P(a)}$$

$$\sigma = \{X/b\} \qquad \sigma = \{X/a\}$$

Retour sur l’exemple

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}$$

$$\dfrac{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\wedge}$$

$$\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}$$

$$\dfrac{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{P(\color{red}{b}\color{black}), \forall y\ P(y) \qquad \neg P(\color{red}{b}\color{black}), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma = \{X/b\} \qquad \sigma = \{X/b\}$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))) \qquad \alpha\neg\neg$$

$$P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))) \qquad \alpha\land$$

$$P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))) \qquad \gamma\forall M$$

$$P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)) \qquad \beta \Leftrightarrow$$

$$P({\color{red}b}), \forall y\ P(y) \qquad\qquad \neg P({\color{red}b}), \neg(\forall y\ P(y)) \qquad \delta\neg\forall$$

$$P({\color{red}b}) \qquad\qquad \neg P(sk_b)$$

$$\odot \qquad \odot$$

Fermée

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\dfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P(\color{red}{b}\color{black}), \forall y\ P(y)}{\dfrac{P(\color{red}{b}\color{black})}{\odot}\ \odot} \quad \dfrac{\neg P(\color{red}{b}\color{black}), \neg(\forall y\ P(y))}{\dfrac{\neg P(sk_b)}{\text{Ouverte}}}\ \delta\neg\forall}\ \beta\Leftrightarrow}\ \gamma\forall M}\ \alpha\land}\ \alpha\neg\neg$$

$\color{blue}{\text{Ouverte}}$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\neg\neg}}{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}\ \alpha_{\land}}{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}\ \gamma_{\forall M}}{P(a), \forall y\ P(y) \quad \mid \quad \neg P(a), \neg(\forall y\ P(y))}\ \beta_{\Leftrightarrow}$$

$\sigma = \{X/a\}$ $\qquad$ $\sigma = \{X/a\}$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\dfrac{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P(a), \forall y\ P(y)}{P(Y)}\ \gamma\forall M \qquad \dfrac{\neg P(a), \neg(\forall y\ P(y))}{\dfrac{\neg P(a)}{\odot}\ \odot}}\ \beta \Leftrightarrow}\ \gamma\forall M}\ \alpha\wedge}\ \alpha\neg\neg$$

Fermée

Retour sur l’exemple

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$
\begin{array}{cl}
\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))) & \\
\hline
P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))) & \alpha\neg\neg \\
\hline
P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))) & \alpha\wedge \\
\hline
P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)) & \gamma\forall M \\
\hline
\begin{array}{cl}
P(\color{red}{a}), \forall y\ P(y) & \\
\hline
P(Y) & \gamma\forall M \\
\hline
P(\color{red}{b}) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
\neg P(\color{red}{a}), \neg(\forall y\ P(y)) & \\
\hline
\neg P(\color{red}{a}) & \\
\hline
\odot & \odot
\end{array}
& \beta\Leftrightarrow
\end{array}
$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\dfrac{P(a) \land \neg P(b) \land \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(X) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P({\color{red}a}), \forall y\ P(y)}{\dfrac{P(Y)}{\dfrac{P({\color{red}b})}{\odot}\ \odot}}\ \gamma\forall M \qquad \dfrac{\neg P({\color{red}a}), \neg(\forall y\ P(y))}{\dfrac{\neg P({\color{red}a})}{\odot}\ \odot}}\ \beta\Leftrightarrow}\ \gamma\forall M}\ \alpha\land}\ \alpha\neg\neg$$

Retour sur l'exemple

Formule à prouver

$$\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))$$

$$\dfrac{\neg\neg(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))))}{\dfrac{P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a), \neg P(b), \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y)))}{\dfrac{P(a) \Leftrightarrow (\forall y\ P(y))}{\dfrac{P(a), \forall y\ P(y)}{\dfrac{P(Y)}{\dfrac{P(b)}{\odot}\ \odot}}\ \gamma\forall M \qquad \dfrac{\neg P(a), \neg(\forall y\ P(y))}{\dfrac{\neg P(a)}{\odot}\ \odot}}\ \beta\Leftrightarrow}\ \gamma\forall M}\ \alpha\wedge}\ \alpha\neg\neg$$

Fermée

Implémentation

Julie's Prover

- Première version en OCaml
- Migration vers Go
    - Langage basé sur la concurrence
    - Goroutines : green threads ($N : M$)
    - Des millions de goroutines

Versions et améliorations

- Version destructive et non-destructive
- Déduction modulo théorie (TER)
- Arithmétique (TER)

Comparatif 1/2

Prouveurs et benchmark

- Prouveurs tableaux : Zenon, Princess, LeoIII
- Prouveurs résolution : Vampire, E
- DMT et sans DMT
- Librairie TPTP[1] : catégorie SYN

1. http://www.tptp.org/

Comparatif 2/2

TPTP	JP		JP+DMT		Zenon		Princess	
SYN (263 problèmes)	201 (76.4%)		201 (76.4%)	+0 (0%) -0 (0%)	256 (97.3%)	+58 (22%) -3 (0.01%)	195 (74.1%)	+0 (0%) -6 (0.02%)
Temps moyen (en secondes)	0.78		0.81		0.23		0.84	
	LeoIII		E		Vampire			
	195 (74.1%)	+1 (0.003%) -7 (0.02%)	261 (99.2%)	+60 (22%) -0 (0%)	263 (100%)	+62 (23.5%) -0 (0%)		
	1.06		0.50		0.57			

Figure 1 : Comparatif de trois solveurs sur 263 problèmes (sans égalité) tirés de la catégorie « SYN » de TPTP [1]

Perspectives et conclusion

Conclusion

Bilan

- Efficacité de la concurrence pour gérer l'équité
- Implémentation d'un outil
- Comparatif sur le benchmark TPTP

Travail à venir

- Preuve de correction et de complétude
- Gestion de l'égalité
- Raisonnement modulo théorie, polymorphisme, arithmétique

Merci pour votre attention !

Des questions ?